Метод Крылова и Черноусько.

Пусть управляемый процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u)\ ,\ t \in [t_0, T]\ ,\ x(t_0) = x_0\ ,\ u(t) \in U,$$

где $x \in R^n$ — вектор фазовых координат, $u \in R^m$ — вектор управлений, x_0 — постоянный вектор, U — замкнутое множество в R^m.

Необходимо найти управление $u(t)$, доставляющее функционалу

$$J(u) = F(T, x(T))$$

минимальное значение, причем момент окончания процесса либо задан, либо определяется условием вида

$$h(T, x(T)) = 0.$$

Рассмотрим метод последовательных приближений, разработанный И.А. Крыловым и Ф.Л. Черноусько.

Будем полагать, что поставленная задача имеет решение. Тогда экстремальные траектория и управление удовлетворяют принципу максимума Понтрягина. Запишем функцию Гамильтона:

$$H\left(t, x, \psi, u\right) = \psi^T f(t, x, u)$$

и сопряженную систему

$$\dot{\psi}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \psi_j = \varphi_i\left(t, x, u, \psi\right)\ , \qquad i = 1, \ldots, n\ ,$$

либо с граничными условиями

$$\psi(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x}\ ,$$

если момент окончания управляемого процесса задан, либо с условием трансверсальности

$$\psi(T) = \left.\left[\frac{dF}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right)^{-1}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\right]\right|_{t=T},$$

если момент T не задан. В последнем выражении символом $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + f^T \dfrac{\partial}{\partial x}$ обозначена полная производная по t вдоль траекторий управляемой системы.

Условие оптимальности функции Гамильтона по переменной u для экстремального управления $u(t)$ имеет вид

$$H\left(t, x(t), \psi(t), u(t)\right) = \max_{u \in U} H\left(t, x(t), \psi(t), u\right)\ , \qquad t \in [t_0, T].$$

Пусть задано некоторое начальное приближение $u^0(t)$ (оно, очевидно, должно быть допустимым). Метод итерационный и k-я итерация заключается в следующем :

1. Интегрируется управляемая система с управлением $u = u^k(t)$ до момента $t = T$ (если он задан) или до выполнения условия $|h(T, x(T))| \leqslant \varepsilon_h$. При этом определяется траектория $x = x^k(t)$ и граничные условия для сопряженной системы. Производные $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ проще всего определить через конечно-разностную аппроксимацию на последнем шаге интегрирования.

2. Затем, интегрируя сопряженную систему справа налево (т.е. от $t = T$ до $t = t_0$) при $u = u^k(t)$ и $x = x^k(t)$, определяем сопряженные переменные $\psi^k(t)$.

3. Определяем новое приближение $u = u^{k+1}(t)$ из принципа максимума

$$H\left(t, x^k(t), \psi^k(t), u^{k+1}(t)\right) = \max_{u \in U} H\left(t, x^k(t), \psi^k(t), u\right), \qquad t \in [t_0, T].$$

   Эта задача математического программирования может иметь неединственное решение в некоторые моменты времени. В этом случае можно выбрать любое решение. После нахождения нового приближения итерация закончена. Заметим, что на следующей итерации мы снова можем получить новое значение момента $t = T$ окончания процесса управления. Если новая длительность процесса больше, то надо доопределить управление.

Если процесс последовательных приближений сходится, то продолжаем его до тех пор, пока, например, значение функционала не станет меняться лишь на очень малую заданную величину ε_J. Поскольку сходимость нельзя, вообще говоря, гарантировать заранее, разумным было бы ограничить число получаемых последовательных приближений. Идеальной была бы ситуация, когда последовательность значений $J(u^k)$ является релаксационной, т.е. всегда $J(u^{k+1}) < J(u^k)$. При этом, даже если мы остановим процесс вычислений на некотором шаге, имеющееся в этот момент приближение будет наилучшим из рассмотреннных. Поэтому (а также в силу своей крайней экономичности и простоты программирования) метод оказался очень популярным во времена вычислительных систем первого и второго поколений.

Иногда может помочь следующий трюк: пусть на некоторой итерации оказалось, что $J(u^{k+1}) > J(u^k)$. Тогда можно составить линейную комбинацию $\tilde{u}(t) = \alpha u^k(t) + (1 - \alpha)u^{k+1}(t)$ и попробовать подобрать α таким образом, чтобы релаксационность восстановилась (например, можно последовательно дробить α). Разумеется, при этом следует соблюдать осторожность, т. к. $\tilde{u}(t)$ не обязательно будет лежать в допустимом множестве U (за исключением случая, когда U — выпуклое множество).

Обратите внимание, что момент $t = T$ может быть произвольным, поэтому при численном решении задач Коши для исходной и сопряженной систем последний (соответственно, первый) шаг интегрирования будет нестандартным, чтобы система могла попасть в конкретный момент времени.

Рассмотрим на примере двух простых задач, как осуществляется итерация в методе Крылова-Черноусько.

Пример 1 (момент T задан). Рассмотрим задачу оптимального управления вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 = u & x_2(0) = 0 \end{cases}, \qquad t \in [0, 1],$$

$$u \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leqslant 1\}, \qquad J = x_1^2(1) + x_2^2(1) \longrightarrow \min .$$

Пусть задано начальное приближение $u^0(t) = 0$. Составим функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi^T f(t, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Запишем также сопряженную систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 & \psi_1(1) = -\left.\dfrac{\partial J}{\partial x_1}\right|_{t=1} = -2x_1(1) \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 & \psi_2(1) = -\left.\dfrac{\partial J}{\partial x_2}\right|_{t=1} = -2x_2(1) \end{cases}$$

Начинаем вычислять новое приближение управления. Для этого подставляем управление $u^0(t)$ в управляемую систему и, решив задачу Коши, находим траекторию $x^0(t)$. Получаем, что $x_1^0(t) = 1$, $x_2^0(t) = 0$ и $J(u^0) = 1$.

Теперь подставим управление u^0 и компоненты траектории $x_1^0(t)$, $x_2^0(t)$ в задачу Коши для сопряженных переменных. Решив ее, получаем, что $\psi_1^0(t) = -2$, $\psi_2^0(t) = 2t - 2$.

Найдем новое управление из принципа максимума, т.е. как решение задачи

$$H\left(t, x^0(t), \psi^0(t), u^1(t)\right) = \max_{|u|\leqslant 1} H\left(t, x^0(t), \psi^0(t), u\right) = \max_{|u|\leqslant 1}\left(\psi_1^0(t)x_2^0(t) + \psi_2^0(t)u\right) .$$

Поскольку от управления зависит только второе слагаемое в функции Гамильтона, в каждый момент времени $t \in [0,1]$ имеем следующую задачу на условный максимум линейной функции от u:

$$\max_{|u|\leqslant 1}(2t-2)\,u .$$

Так как на рассматриваемом промежутке $2t - 2 \leqslant 0$, то оптимальным будет управление $u^1(t) = -1$. Если подставить новое управление в задачу Коши для $x(t)$, получим новое приближение для траектории

$$x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + 1, \quad x_2(t) = -t ,$$

и новое значение критерия качества $J(u^1) = \dfrac{5}{4} > J(u^0)$.

Как видим, ситуация ухудшилась. Попробуем исправить положение, выбрав управление в виде выпуклой линейной комбинации двух имеющихся приближений:

$$\tilde{u}(t) = \alpha u^1(t) + (1-\alpha)u^0(t) = -\alpha .$$

Найдем значение параметра $\alpha \in [0,1]$, которое доставляло бы минимум критерию качества задачи. Для этого подставим $\tilde{u}(t)$ в управляемую систему и найдем траекторию для произвольного значения α:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 = -\alpha & x_2(0) = 0 \end{cases}, \qquad t \in [0,1].$$

Получаем, что

$$x_1(t) = -\frac{\alpha t^2}{2} + 1, \quad x_2(t) = \alpha t .$$

Значит, $J(\tilde{u}) = \dfrac{5}{4}\alpha^2 - \alpha + 1$. Эта квадратичная функция достигает минимума в точке $\alpha^* = \dfrac{2}{5}$. Таким образом, управление $\tilde{u}(t) = -\dfrac{2}{5}$ доставляет критерию качества значение $J(\tilde{u}) = \dfrac{4}{5} < J(u^0)$. Значит, можно положить $u^1(t) = \dfrac{2}{5}$ и на этом одна итерация метода Крылова и Черноусько закончена.

□

Пример 2 (момент T не задан). Рассмотрим задачу оптимального управления вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = x_4 & x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_3 = u_1 & x_3(0) = 1 \\ \dot{x}_4 = u_2 & x_4(0) = 1 \end{cases}, \qquad t \in [0,T],$$

$$u \in U = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : |u_i| \leqslant 1, i = 1, 2 \right\} \ , \qquad J = F(T, x(T)) = -T \longrightarrow \min \ .$$

Момент остановки системы T определяется как первый момент времени, в который выполняется условие

$$h(x(T)) = x_1^2(T) + x_2^2(T) - 1 = 0 \ .$$

Пусть задано начальное приближение $u^0(t) = (0, 0)^T$. Составим функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi^T f(t, x, u) = \psi_1 x_3 + \psi_2 x_4 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2 \ .$$

Чтобы записать сопряженную систему, разберемся с краевыми условиями. Поскольку h не зависит явно от t, а F не зависит явно от x, то $\dfrac{\partial h}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$. Найдем полные производные вдоль траекторий системы:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + f^T \frac{\partial F}{\partial t} = -1 \ , \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial t} + f^T \frac{\partial h}{\partial x} = 2x_1 x_3 + 2x_2 x_4 \ . \end{aligned}$$

Теперь можно записать сопряженную систему с краевыми условиями:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 & \psi_1(T) = -\dfrac{x_1(T)}{x_1(T)x_3(T) + x_2(T)x_4(T)} \\ \dot{\psi}_2 = 0 & \psi_2(T) = -\dfrac{x_2(T)}{x_1(T)x_3(T) + x_2(T)x_4(T)} \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_1 & \psi_3(T) = 0 \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_2 & \psi_4(T) = 0 \end{cases}$$

Начинаем вычислять новое приближение управления. Для этого подставляем управление $u^0(t)$ в управляемую систему и, решив задачу Коши, находим траекторию $x^0(t)$. Получаем, что

$$x_1^0(t) = x_2^0(t) = t, \quad x_3^0(t) = x_4^0(t) = 1 \ .$$

Найдем момент окончания движения системы из уравнения:

$$h(T, x^0(T)) = 2T^2 - 1 = 0,$$

то есть $T^0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Из соображений физической реализуемости движения выбираем $T^0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, $J(u^0) = -T^0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.7071$.

Теперь подставим управление u^0 и компоненты траектории $x_1^0(t)$, $x_2^0(t)$ в задачу Коши для сопряженных переменных. Краевые условия при этом принимают вид

$$\psi_1^0(T^0) = \psi_2^0(T^0) = -\frac{1}{2}, \quad \psi_3^0(T^0) = \psi_4^0(T^0) = 0 \ .$$

Решив ее, получаем, что

$$\psi_1^0(t) = \psi_2^0(t) \equiv -\frac{1}{2}, \quad \psi_3^0(t) = \psi_4^0(t) = \frac{1}{2}\, t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ .$$

Найдем новое управление из принципа максимума, т.е. как решение задачи

$$H\left(t, x^0(t), \psi^0(t), u^1(t)\right) = \max_{u \in U} H\left(t, x^0(t), \psi^0(t), u\right) \ .$$

Поскольку от управления зависят только последние два слагаемых в функции Гамильтона, в каждый момент времени $t \in [0, T^0]$ имеем следующую задачу на условный максимум линейной функции от u_1, u_2:

$$\max_{|u_i| \leqslant 1} (\psi_3 u_1 + \psi_4 u_2) = \max_{|u_i| \leqslant 1} \left(\frac{1}{2}\, t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) (u_1 + u_2) \ .$$

Так как на рассматриваемом промежутке времени множитель при $u_1 + u_2$ в последнем выражении принимает лишь неположительные значения, то нетрудно показать, что оптимальным будет управление $u_1^1(t) = u_2^1(t) = -1$. Если подставить новое управление в задачу Коши для $x(t)$, получим новое приближение для траектории

$$x_1^1(t) = x_2^1(t) = -\frac{t^2}{2} + t, \quad x_3^1(t) = x_4^1(t) = -t + 1 \ .$$

Уравнение для нового момента времени T принимает вид

$$2 \left(-\frac{T^2}{2} + T \right)^2 - 1 = 0 \ .$$

Решив его, выбираем положительный корень $T^1 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$. Значит, новое значение критерия качества равно $J(u^1) = -1 - \sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx -2.5538$.

Таким образом, мы нашли новое управление, для которого $J(u^1) < J(u^0)$. На этом одна итерация метода Крылова и Черноусько закончена.

Отметим, что геометрический смысл произошедшего улучшения управления очень прост. Решаемая задача, по сути, заключается в управлении материальной точкой в двухмерном пространстве. Цель состоит в том, чтобы точка, отправившись из начала координат с единичным вектором скорости, направленным вдоль биссектрисы I квадранта, **как можно дольше** не пересекала границу единичного круга. Начальное приближение заключалось в отсутствии какого-либо влияния на траекторию точки — она двигалась по биссектрисе с постоянной единичной скоростью и достигла границы круга за время T^0. При этом ее координаты линейно росли со временем. Следующее приближение по своему смыслу означает, что точка сразу же включила «тормоза» на максимум и управление было направлено на то, чтобы погасить начальную скорость. При этом уже скорость менялась линейно, а координаты точки росли с квадратичной скоростью (при этом $x_1(t) = x_2(t), t \in [0, T^1]$, т. е. точка все так же движется по биссектрисе).

$\square$